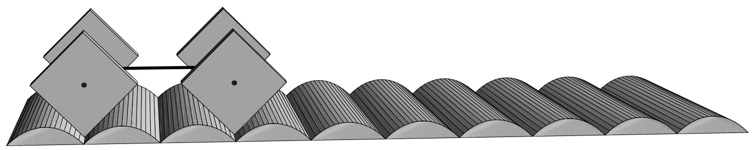
Präsenzübung zu den Rechenmethoden der Physik

14. 4. 2000 SS 2000

1. Wagen mit quadratischen Rädern

Ein Wagen mit quadratischen Rädern bewegt sich auf einer Strecke, die aus periodisch hintereinandergesetzten $-\cosh x$ Abschnitten besteht, wie in der Abbildung gezeigt. Die Räder haben die Seitenlänge 2. Erstaunlicherweise rollt der Wagen auf der Strecke regulär ab in dem Sinn, dass die Achsen während der Fahrt in konstanter Höhe verbleiben.



Gehen Sie zum Nachweis dieser Aussage wie folgt vor:

(a) Überlegen Sie sich, daß die Bewegung der Räder zu einem Zeitpunkt t als Drehung um den jeweiligen Berührpunkt zwischen Rad und Fläche angesehen werden kann.

(b) Welche Punkte des Rades erfahren bei dieser Drehung *keine* Höhenänderung?

(c) Offenbar ist zu zeigen, dass sich die Radachse zu jedem Zeitpunkt zu den unter (b) genannten Punkten gehört. Beweisen Sie dies, indem Sie den Vektor vom momentanen Berührpunkt zu der Radachse konstruieren. *Hinweis*: Verwenden Sie die aus der Hausübung 46 bekannte Tatsache, dass die Bogenlänge entlang der $\cosh x$ Kurve durch $s(x) = \sinh x$ gegeben ist, wenn $x = 0$ als Anfangspunkt gewählt wird.

2. Gerade in Polarkoordinaten

Betrachten Sie eine Gerade in der Ebene, die nicht durch den Ursprung geht. Die Punkte $\vec{r}$ auf der Gerader erfüllen in der impliziten Darstellung die Gleichung $\vec{r}\cdot\vec{n} = d$, mit einem Einheitsvektor $\vec{n}$.

(a) Welche Bedeutung haben $\vec{n}$ und d?

(b) Legen Sie im Folgenden die x-Achse entlang des Vektors $\vec{n}$. Welche Abhängigkeit $r = r(\varphi)$ bekommen Sie damit aus der Geradengleichung unter Verwendung von Polarkoordinaten $\vec{r} \doteq (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$?

(c) Gesucht ist nun eine Parametrisierung der Geraden nach der Bogenlänge, d. h.

$$\vec{r} \doteq \begin{pmatrix} r(\varphi(s)) \cos\varphi(s) \\ r(\varphi(s)) \sin\varphi(s) \end{pmatrix}$$

mit $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$. Bestimmen Sie zunächst das Linienelement ds. Daraus erhalten Sie die Abhängigkeit $s = s(\varphi)$ und weiterhin $r = r(s)$. Welche geometrische Bedeutung hat $r(s)$?

(d) Berechnen Sie die erhaltene Bogenlängenparametrisierung in kartesische Koordinaten zurück. Haben Sie das Resultat erwartet?

Hinweise:

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$